ASPECTE METODICE PRIVIND APLICAŢIILE MATEMATICII ÎN ECONOMIE

METHODICAL ASPECTS CONCERNING THE MATHEMATICS USE INTO ECONOMY.

Dumitru BĂLĂ
Facultatea de Economie şi Administrarea Afacerilor
Universitatea din Craiova, Centrul Universitar Dr. Tr. Severin

Abstract. In this paper there are presented some psichological, theaching and methodical techniques, which appear in teaching mathematics at economical profyle colleges. There are specified the difficult aspects in understanding the concepts of maximum, minimum and optimum.

1. ASPECTE PSIHOLOGICE ŞI METODICE PRIVIND APLICAŢIILE MATEMATICII ÎN ECONOMIE

Cadrele universitare recunosc faptul că atitudinile şi percepţiile influenţează semnificativ învăţarea studenţilor. De asemenea, cu toţii cunoaştem impactul pe care îl pot avea atitudinile şi percepţiile faţă de profesori sau colegi, asupra învăţării sau asupra propriilor abilităţi. Atunci când atitudinile şi percepţiile noastre sunt pozitive, învăţarea se realizează uşor, iar dacă sunt negative învăţarea este influenţată în sens negativ. Este responsabilitatea profesorului şi studentului, de a menţine atitudini şi percepţii pozitive sau de a le schimba pe cele negative.

Un profesor munceşte aproape permanent pentru a influenţa atitudinile şi percepţiile studenţilor, fiind câteodată, atât de abil, încât studenţii nu observă eforturile acestuia. În continuare, prezentăm o serie de strategii şi tehnici de formare a atitudinilor şi percepţiilor pozitive faţă de atmosfera şi climatul învăţării, dar şi faţă de sarcinile de lucru. Aşa cum se recomandă în [3] aceste strategii, tehnici, recomandări şi exemple vă vor ajuta:

- Să formaţi atitudini şi percepţii pozitive studenţilor;
- Să-i învăţaţi pe studenţi cum să-şi menţină atitudinile şi percepţiile pozitive şi să le schimbe pe cele negative.

Această dimensiune a învăţării include două secţiuni principale:

I Ajutarea studenţilor să-şi dezvolte percepţii şi atitudini pozitive faţă de atmosfera şi climatul învăţării. În acest caz, studenţii:

- se simt acceptaţi de profesori şi colegi;
- au un sentiment de confort şi ordine;
- se simt în siguranţă.

II Ajutarea studenţilor să-şi dezvolte percepţii şi atitudini pozitive faţă de sarcinile de învăţare. În această situaţie, studenţii:

- percep sarcina de lucru ca fiind valoroasă şi interesantă;
- înţeleg clar instrucţiunile şi cerinţele sarcinilor de lucru;
- cred că au abilitatea şi resursele de a îndeplini sarcinile.

Ajutarea studenţilor să dezvolte atitudini şi percepţii pozitive faţă de atmosfera şi climatul învăţării

Aşa cum se precizează în [3] principalul obiectiv al oricărui dascăl este asigurarea unui cadru de lucru în care studenţii:

- să se simtă acceptaţi de profesori şi colegi;
- să aibă un sentiment de confort şi ordine.

În continuare, vă propunem o serie de strategii pe care să le folosiţi la clasă, astfel încât studenţii să dezvolte atitudini şi percepţii pozitive faţă de învăţare, apoi să-şi formeze propriile strategii de dezvoltare a atitudinilor şi percepţiilor pozitive.

Înainte de a ajuta studenţii să-şi însuşească şi să integreze cunoştinţele, trebuie să stabilim ce tip de cunoştinţe are cursul sau unitatea de învăţare. Mulţi reprezentanţi ai psihologiei cognitive, împart cunoştinţele în două categorii fundamentale: cunoştinţe declarative şi cunoştinţe procedurale. Iată câteva exemple pentru fiecare categorie:

Învăţarea cunoştinţelor procedurale presupune ca studentul să realizeze un proces sau să demonstreze o abilitate, adică să întreprindă o acţiune. Cunoştinţele declarative îi arată studentui cum să cunoască sau să facă un lucru. Indiferent că sunt procese psihice sau fizice, atunci când le realizăm, parcurgem o serie de etape sau paşi: prima dată facem un lucru, apoi altul şi altul. Aceasta se întamplă chiar şi în cazul acţiunilor mai complexe, precum scrisul, cititul, interpretarea unui grafic sau realizarea unui experiment. Deşi succesiunea paşilor ce formează un proces, nu este întotdeauna liniară, există situaţii în care trebuie să respectăm ordinea acestora.

Pe de altă parte, învăţarea cunoştinţelor declarative nu presupune ca studentul să întreprindă o serie de acţiuni mentale sau a fizice. Spre deosebire de cunoştinţele procedurale, acest tip de informaţii îi arată studentului ce să cunoască şi să înţeleagă. În concluzie, cunoştinţele declarative reprezintă partea teoretică a cunoştinţelor de conţinut, şi se referă la fapte, interpretări sau judecăţi de valoare.

Importanţa înţelegerii naturii cunoştinţelor

Studierea diferenţelor dintre cele două categorii de cunoştinţe fundamentale, implică mult timp şi efort. Cu toate acestea, mulţi profesori sunt de părere că acest lucru este esenţial, atât pentru planificarea şi implementarea programei, cât şi pentru realizarea instruirii şi evaluării didactice. De aceea, pentru a ajuta studenţii să înveţe, trebuie să înţelegem procesul de învăţare şi natura cunoştinţelor ce trebuie însuşite. Va trebui să fim foarte buni la identificarea cunoştinţelor pe care studenţii le vor învăţa, dar şi la planificarea activităţilor educaţionale. De asemenea, este important să înţelegem prin ce se deosebeşte învăţarea şi evaluarea cunoştinţelor declarative, de cea a cunoştinţelor procedurale. Numai astfel putem decide ce tip de cunoştinţe merită a fi însuşite şi integrate, procesate, extinse şi nuanţate.

Relaţia dintre cunoştinţele declarative şi cele procedurale

Dacă principala preocupare a profesorilor ar viza abilitatea studenţilor de a folosi cunoştinţele învăţate, atunci însuşirea cunoştinţelor procedurale ar putea deveni scopul fundamental al educaţiei. Această situaţie are însă şi o latură limitată, deoarece se bazează pe ideea conform căreia cunoştinţele procedurale sunt cele mai importante, mai importante decât cele declarative. Putem ajunge la această concluzie greşită din două motive: 1- deoarece în majoritatea cazurilor, descriem cunoştinţele învăţate de studenţi prin expresii de genul ,,studentul este capabil să..”; 2- datorită folosirii frecvente a acestui tip de cunoştinţe. Mai mult de atât, avem tendinţa să credem că atunci când studenţii sunt implicaţi într-o activitate, aceştia folosesc mai mult cunoştinţele procedurale. Modalităţile de utilizare a cunoştinţelor declarative, nu sunt întotdeauna foarte clare, dar sunt foarte importante.

Cele opt procese complexe ale gândirii descrise în continuare, sunt oferite ca resurse pentru profesori, deoarece îi ajută pe studenţi să-şi extindă şi să-şi perfecţioneze cunoştinţele. Nu este suficient să le punem întrebări sau să le dăm teme care să includă procesele gândirii; pedagogii trebuie să înveţe în mod direct studenţii aceste operaţii. Următoarele procese raţionale pot fi folosite pentru a-i ajuta pe studenţi să-şi aprofundeze înţelegerea a ceea ce au învăţăt:

- Compararea: Identificarea şi evidenţierea asemănărilor şi deosebirilor dintre elemente.
- Clasificarea: Gruparea lucrurilor în categorii pe baza caracteristicilor lor.
- Abstractizarea: Identificarea şi evidenţierea temei sau a tiparului general al informaţiilor.
- Raţionamentul inductiv sau inducţia: Generalizarea informaţiilor şi observaţiilor pe baza experienţei.
- Deducţia: Folosirea generalizărilor şi a principiilor pentru a trage concluzii despre informaţii sau situaţii specifice.
- Argumentarea sau construirea suportului: Construirea unor sisteme de suport pentru afirmaţii.
- Analiza erorilor: Identificarea şi evidenţierea greşelilor din gândire.
- Analiza perspectivelor: Identificarea multiplelor perspective asupra unei probleme şi examinarea motivelor logice ce le susţin.

Fiecare dintre aceste operaţii ale gândirii sunt folosite inconştient de către oameni în fiecare zi. Comparăm lucruri. Tragem concluzii în mod inductiv. Analizăm perspectivele altor oameni în timpul interacţiunilor informale şi în situaţiile de învăţare. La clasă, dacă profesorii cer studenţilor să utilizeze aceste procese pentru a-şi extinde şi perfecţiona cunoştinţele, trebuie să îi înveţe şi paşii fiecărui proces în parte, astfel încât studenţii să folosească operaţiile în mod riguros şi deliberat.

Aşa cum este precizat în [3] înainte ca profesorul să-şi planifice predarea acestor procese, ar trebui să ţină cont de câteva principii ale implementării:

- Deşi cele opt procese complexe ale gândirii ar trebui învăţate/predate în mod riguros şi sistematic, nici un profesor nu ar trebui să le abordeze pe toate opt într-un singur semestru sau an şcolar. Dacă studenţii vor învăţa şi interioriza aceste procese, ei trebuie să aibă timp să le modeleze şi să le exerseze.
- Când studenţii învaţă pentru prima dată procesele raţiunii, ar trebui ca profesorul să introducă anual doar trei sau patru dintre acestea.
- Studenţii sunt capabili să înveţe şi să folosească toate aceste tipuri de procese ale gândirii. Ei au nevoie de îndrumare şi modelare în primele stadii ale învăţării proceselor, iar mai târziu ar putea avea nevoie de mai multă îndrumare, dacă vor aplica procesele asupra unui conţinut informaţional din ce în ce mai complex.
- Studenţii îşi vor dezvolta abilitatea de a folosi operaţiile raţionale dacă profesorii, indiferent de an sau disciplină, vor folosi un limbaj comun, oferindu-le experienţe similare şi trasând aşteptări care responsabilizează elevii faţă de abilităţile specifice gândirii. Chiar dacă nu este nimic magic în legătură cu lista de procese ale gândirii prezentate, a avea o listă care să fie folosită la toate disciplinele poate fi ceva magic. În acest fel, studenţii îşi pot dezvolta abilităţile de gândire la un nivel din ce în ce mai puţin întâlnit în sălile de curs astăzi.

Pentru explicarea fiecărui proces a gândirii, se pot urmării următoarele cinci etape:

1. **Ajutaţi studenţii să înţeleagă procesele**. Această secţiune prezintă modul cum poate fi introdus procesul studenţilor şi cum poate să-i ajute profesorul să înţeleagă funcţia sau scopul procesului.
2. **Oferiţi un model al procesului şi furnizaţi oportunităţi studenţilor pentru a-l putea exersa.** Această etapă introduce procesul propriu-zis, explicând paşii implicaţi în folosirea acestuia. De asemenea, trebuie prezentate

3. **Ajutaţi studenţii să se concentreze asupra paşilor importanţi şi asupra aspectelor dificile ale procesului.** Această etapă identifică paşii importanţi, aspectele dificile ale procesului, precum şi o serie de exemple specifice şi sugestii despre modul de operare cu aceste elemente.
4. **Furnizaţi studenţilor organizatori grafici şi reprezentări ale modelului pentru a-i ajuta să înţeleagă şi să folosească procesul.** Organizatorii grafici şi reprezentările îi ajută pe studenţi să înţeleagă şi să vizualizeze procesul.
5. **Folosiţi sarcini de lucru structurate de profesor şi sarcini structurate de studenţi.** Această secţiune explică importanţa modelării şi ghidării studentului în folosirea procesului, mai întâi prin intermediul sarcinilor structurate de profesor.

Studenţii beneficiază în două feluri atunci când îşi dezvoltă obişnuinţe mentale productive. În primul rând, dezvoltarea unor astfel de obişnuinţe ale minţii poate întări învăţarea unor cunoştinţe din conţinutul disciplinelor din planul de învăţământ. Deşi nu putem prezice exact ce fel de cunoştinţe vor fi necesare studenţilor în viaţă, putem prezice cu o mai mare siguranţă că, aproape în orice fază a vieţii lor, studenţii vor trebui să îşi continue învăţarea. Obişnuinţele mentale productive îi ajută pe studenţi să reuşească să înveţe în orice situaţie pe care o întâlnesc.

Unele dispoziţiile identificate sunt numite obişnuinţe mentale deoarece este important să creştem frecvenţa cu care studenţii le expun, aşa cum este important să formăm la studenţi obişnuinţe bune de studiu sau obişnuinţe de ascultare. Totuşi, termenul „obişnuinţă" poate sugera că studentul prezintă un comportament în mod automat, aşa încât acesta e aproape neconştientizat. Este important, însă, să solicităm studenţilor că vrem ca ei să-şi demonstreze abilitatea de a folosi obişnuinţele mentale productive în mod conştient; cu alte cuvinte, că dorim ca ei să demonstreze că înţeleg când şi de ce sunt necesare anumite obişnuinţe. Obişnuinţele mentale identificate se pot clasifica în trei categorii generale: obişnuinţe de gândire critică, de gândire creativă şi de gândire cu auto-reglare.

Dacă ai obişnuinţe mentale care manifestă **gândirea critică**, ai tendinţa:
- să fii corect şi să cauţi corectitudinea;
- să fii clar şi să cauţi claritatea;
- să fii deschis la nou;
- să-ţi restrângi impulsivitatea;
- să iei poziţie când situaţia o cere;
- să răspunzi adecvat la sentimentele şi la nivelul de cunoştinţe al altora.

Dacă ai obişnuinţe mentale care manifestă **gândirea creativă,** ai tendinţa:
- să perseverezi;
- să forţezi limitele cunoştinţelor şi abilităţilor tale;
- să generezi, să ai încredere în, şi să îţi menţii propriile standarde de evaluare;
- să generezi noi modalităţi de a vedea o anumită situaţie, dincolo de graniţa convenţiilor standard.

Dacă ai obişnuinţe mentale care manifestă **gândirea cu auto-reglare** ai tendinţa:
- să monitorizezi propria gândire;
- să planifici adecvat;
- să identifici şi foloseşti resursele necesare;
- să răspunzi adecvat la feedback;
- să evaluezi eficienţa acţiunilor tale;

Lista aceasta de obişnuinţe mentale reflectă munca unui număr mare de cercetători şi specialişti în educaţie. Totuşi, nu se doreşte a fi o listă exhaustivă sau una care e potrivită pentru oricine.
S-ar putea, de asemenea, să vă doriţi să încurajaţi studenţii să-şi construiască propria listă de obişnuinţe mentale care cred ei că le vor spori învăţarea.

Aşa cum este precizat în [4] învăţarea matematicii într-un context de maximizare a eficienţei educaţionale, depinde de înţelegerea organizării psihice a fiecărui student în parte, de cunoaşterea factorilor psiho-educaţionali ce fac posibil procesul învăţării, de calitatea metodelor utilizate în procesul predării, de cunoaşterea principiilor generale ale psihodidacticii matematice. Profesorul de matematică trebuie nu numai să provoace şi să întreţină un activism general la curs sau seminar, dar să şi controleze raporturile imagine-concept-problemă-situaţie problematică-acţiune-competenţă. În acest mod, el dă o tentă dinamogenă motivaţiei învăţării matematicii.

Probematica interdisciplinarităţii pare o aventură dificilă care poate modifica cunoştinţele oricui în cadrul disciplinei pe care o stăpâneşte şi o profesează. Numai o abordare interdisciplinară a unui domeniu al cunoaşterii îl aruncă pe cercetător în braţele necunoscutului.

În domeniul economic deseori suntem puşi în situaţia de a calcula anumite mărimi cum ar fi producţia, cheltuielile, profitul, pierderile. Pentru mărimile amintite dar şi pentru altele suntem interesaţi să calculăm minimul, maximul sau optimul. Uneori nu avem minim sau maxim şi ne interesează o valoare convenabilă. Trebuie să alegem şi un model corespunzător. Folosirea derivatei se face în cazul continuu, în cazul discret suntem puşi deseori în situaţia să alegem o valoare convenabilă. Aşa se întâmplă în cazul modelului discret de calcul a uzurii unui utilaj. Cheltuielile să fie minime şi se alege o valoare convenabilă în funcţie de timp dar care nu este neapărat cea mai mică (cheltuielie sunt aproximativ egale pentru 7 ani respectiv 10 ani de funcţionare şi se alege ca utilajul să funcţioneze 10 ani).

2. ASPECTE MATEMATICE PRIVIND APLICAŢIILE MATEMATICII ÎN ECONOMIE

Predând matematică la facultăţi cu profil economic şi geografic am constatat anumite carenţe în însuşirea programei analitice şi faptul că studenţii nu sunt obişnuiţi să pună întrebări la curs şi seminar. De fapt pentru a încuraja prezenţa la curs şi seminar, atunci când am încercat un dialog cu studenţii am cerut să îşi exprime părerea cine doreşte. Poate că în învăţământul preuniversitar şi apoi în cel universitar s-a folosit prea mult expresia "stai în banca ta" şi nu s-a promovat o cultură a dialogului. În continuare am să mă refer la câţiva termeni matematici care au şi un profund caracter economic şi anume: optim, eficace, maxim, minim, extrem, staţionar şi margine. Vom preciza câteva aspecte date de dicţionarul explicativ al limbii române (DEX) cât şi aspecte matematice ale acestor noţiuni.

Pentru cuvântul optim în DEX întâlnim explicaţiile: cel mai bun sau foarte bun (adecvat, potruvit, indicat); care asigură cea mai mare eficienţă economică, care corespunde cel mai bine intereselor economice urmărite; Din fr. optime, lat. optimus.

Pentru cuvântul eficace în DEX întâlnim explicaţiile: care produce efectul scontat, care dă un rezultat pozitiv; Din fr. efficace, lat. efficax,-acis.

Pentru cuvântul maximum în DEX întâlnim explicaţiile: limită superioară peste care nu se poate trece, cea mai mare cantitate, valoare, intensitate; Din fr. maximum, lat. maximum.

Pentru cuvântul minimum în DEX întâlnim explicaţiile: punct limită, fază reprezentând extrema inferioară, cea mai mică cantitate, valoare; Din fr. minimum, lat. minimum.

Pentru cuvântul extrem în DEX întâlnim explicaţiile: foarte mare, exagerat; La extrem=până la ultima limită, peste măsură; care are cea mai mare sau cea mai mică dintre valorile pe care le poate avea o mărime; Din fr. extrême, lat. extremus.

Pentru cuvântul staţionar în DEX întâlnim explicaţiile: care nu variază câtva timp; constant; care rămâne în aceeaşi stare, care nu mai evoluează, care nu progresează; Din fr. stationnaire, lat. stationarius.

Pentru cuvântul margine în DEX întâlnim explicaţiile: loc unde se termină o suprafaţă; extremitate, capăt al unei suprafeţe; fără margini=nesfârşit, infinit; imens; limită până la care se poate admite sau concepe ceva; Din lat. margo,-inis.

În continuare prezint câteva aspecte matematice legate de: maxim, minim, extrem, margine superioară, puncte staţionare şi optim dorind să subliniez legăturile şi diferenţele dintre aceste noţiuni şi care sunt aspectele pe care studenţii le înţeleg mai greu sau deloc.

Definiţia 1. Fixăm o funcţie f : A $\subset$ R$\to$ R. Un punct $x_0 \in$A se numeşte punct de maxim relativ (respectiv de minim relativ) al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap A$ să avem :

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{respectiv } f(x) \geq f(x_0))$$

$f(x_0)$ se numeşte maxim (respectiv minim) relativ al lui f.

Observaţii:

1) Punctele de maxim sau de minim relativ se numesc puncte de extrem relativ.
2) Dacă inegalităţile $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$) sunt stricte pentru orice $x \in U \cap A$, $x \neq x_0$ se spune că x_0 este un punct de extrem strict .

Definiţia 2. Valorile funcţiei în punctele ei de extrem relativ se numesc extreme relative ale funcţiei.

Observaţii:

1) Faptul că funcţia considerată este cu valori reale este esenţial (folosindu-se relaţia de ordine $\leq$ pe R).
2) O funcţie poate să aibă mai multe puncte de maxim si minim relativ.
3) Un minim relativ poate să fie mai mare decât un maxim relativ ceea ce justifică adjectivul „relativ”.
4) Valorile $\sup_{x\in A} f(x)$, $\inf_{x\in A} f(x)$ calculate în R se mai numesc extreme globale ale lui f pe A.
5) Punctele de extrem relativ se mai numesc puncte de extrem local , deoarece inegalităţile de tipul $f(x) \leq f(x_0)$ (respectiv $f(x) \geq f(x_0)$ sunt verificate nu neapărat pe întreg domeniul de definiţie al funcţiei f ci numai în jurul lui x_0.
6) Dacă marginea M = $\sup_{x\in A} f(x)$ este atinsă, atunci orice punct x astfel încât $f(x_0) = M$ va fi un punct de maxim (nu neapărat strict).
7) Se poate întâmpla ca x_0 să fie un punct de maxim şi totuşi $f(x_0) < M$.
8) Dacă marginea superioară sup f(x) nu este atinsă pe mulţimea A, atunci se poate ca funcţia să nu aibă puncte de maxim.

Teorema lui P. Fermat. Fie $x_0 \in I$ un interval deschis şi x_0 un punct de extrem (relativ) al unei funcţii f:I$\to$R. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0)$ *=0.*

Observaţii:

1) Dacă I nu ar fi fost interval deschis, de exemplu I=[a,b] şi x_0=a (sau x_0=b), atunci teorema nu ar fi fost adevărată pentru că f(x) nu ar fi fost definită pentru x < a, respectiv pentru x > b .
2) Reciproca teoremei lui Fermat este în general falsă. Demonstraţia se face dând un contraexemplu:
   $f(x) = x^3$; $f'(x) = 3x^2$; $f'(0) = 0$ nu rezultă $x_0 = 0$ punct de extrem local pentru că f este strict crescătoare.
3) Teorema lui Fermat dă condiţii necesare de extrem, dar nu şi suficiente.
4) **Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat.**
   În condiţiile enunţului, într-un punct de extrem, tangenta la grafic este paralelă cu axa Ox .
5) Dacă f:I→R este o funcţie derivabilă pe un interval deschis I, atunci zerourile derivatei f pe I sunt numite şi puncte critice ale lui f pe I.
6) Teorema lui Fermat afirmă că punctele de extrem local sunt printre punctele critice .

Teorema lui M. Rolle. Fie f:[a,b]→R, a < b o funcţie Rolle astfel încât f(a) = f(b), atunci există cel puţin un punct c∈(a,b) astfel încât $f'(c)=0$.

Definiţia 3. O funcţie f:[a,b]→R(a< b) se numeşte funcţie Rolle dacă este continuă pe intervalul deschis (a,b) .

Corolar 1. Între două zerouri ale unei funcţii derivabile pe un interval se află cel puţin un zero al derivatei.

Teorema lui Darboux. Dacă f:I→R este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa f' are proprietatea lui Darboux adică nu poate trece de la o valoare la alta fără a trece prin toate valorile intermediare.

Corolar 2. Fie f:I→R o funcţie derivabilă pe un interval I. Dacă derivata f' nu se anulează pe I, atunci f' are semn constant pe I.

Fief : $D \subseteq R^n \to R$; $n \geq 1$.

Definiţia 4. Un punct $P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D^0$ se numeşte punct de maxim local (respectiv minim local) al funcţiei $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dacă există o vecinătate Vp_0 a punctului P_0 astfel încât pentru orice punct $P=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in Vp_0 \cap D$ să avem :

$$f(P) \leq f(P_0)\text{ , respectiv } f(P) \geq f(P_0)$$

Observaţie :

Punctele de maxim şi de minim (local) se mai numesc şi puncte de extrem.
Punctele se numesc puncte de extrem local sau relativ.

Definiţia 5. Dacă P_0 este un punct de maxim local (relativ) al funcţiei f , atunci valoarea sa în punctul P_0 , $f(P_0)$ se numeşte maxim local al funcţiei .

Dacă P este un punct de minim local (relativ) al funcţiei f , atunci f (P) se zice că este minim local al funcţiei.

Observaţie :

Dacă putem alege vecinătatea V de rază destul de mică încât inegalităţile din definiţie să fie stricte , atunci vom zice că avem maxim local strict (respectiv minim local strict) , sau că funcţia admite un maxim (respectiv minim) propriu.

Observaţii :

1) În R^1 reciproca teoremei lui Fermat nu este în general valabilă , adică dacă într-un punct derivata unei funcţii se anulează , acel punct nu este neapărat punct de extrem.
2) Propoziţia de mai sus este o condiţie necesară , dar nu şi suficientă pentru existenţa punctelor de extrem . Eventualele puncte de extrem se găsesc printre punctele în care derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei f se anulează.

Definiţia 6. Un punct $P_0=(a_1, a_2, ..., a_n)\in D^0$ se numeşte punct staţionar al funcţiei f, dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul P_0 şi dacă diferenţiala sa este nulă în acest punct.

$$df = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

df =0 în punctul P_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(P_0) = 0$; (k=1,2,....,n)

Observaţie :

În acele puncte P_0 în care diferenţiala este nulă, variaţia funcţiei în jurul punctelor respective este considerabil de mică, fapt care justifică denumirea de mai sus.

Propoziţia 1. *Orice punct de extrem local din interiorul mulţimii de definiţie D în care funcţia f (P) este diferenţiabilă, este un punct staţionar al funcţiei .*

Observaţii :

1) Propoziţia reciprocă nu mai este valabilă, în sensul că există puncte staţionare care nu sunt puncte de extrem.
2) f : $D_1 \subset R^1 \to R$; $f'(x_i) = 0$; x_i nu sunt puncte de extrem , ci de inflexiune .

Observaţii:

În literatura de specialitate se folosesc notaţiile lui Monge (pentru o mai uşoară reţinere) pentru derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei f(x,y) şi anume:

$$r = f''_{x^2} \quad ; \quad s = f''_{xy} \quad ; \quad t = f''_{y^2}$$

Condiţia suficientă pentru existenţa (sau absenţa) punctului de extrem se scrie sub forma :

1) Dacă în punctul staţionar $P_0 = (x_0, y_0)$ avem s^2 -r t<0, atunci în acest punct avem un extrem local.
2) Dacă s^2 - r t > 0 în punctul P_0, nu avem nici un extrem local.

Când s^2 - r t = 0 în $P_0 = (x_0, y_0)$ se cere discuţie specială de precizare.

Definiţia 7. Fie $f(x)$ = f $(x_1, x_2, ..., x_n)$ o funcţie reală definită pe o mulţime $E \subset R^n$ şi fie $A \subset E$. Spunem că funcţia f(x) are într-un punct a $\in$ A un extrem relativ la mulţimea A, dacă restricţia funcţiei f(x) la mulţimea A are în punctul a un extrem obişnuit.

A spune că funcţia f(x) are în punctul a un maxim (respectiv un minim) relativ la mulţimea A înseamnă că există o vecinătate V a lui a, astfel încât să avem

f(x) $\geq$ f(a) respectiv f(x) $\leq$ f(a)

pentru orice punct $x \in V \cap A$.

Extremele funcţiei f(x) relative la o submulţime $A \subset E$ se numesc extreme condiţionate.

Definiţia 8. Vom spune că funcţia f are într-un punct $p_0 \in$A un extrem relativ la submulţimea A dacă restricţia ei la această mulţime are în punctul p_0 un extrem obişnuit. Acele extreme ale funcţie f care vor fi considerate numai relativ la submulţimea A$\subset$D se vor numi extreme condiţionate.

În general o problemă de programare liniară are următoarele proprietăţi:

-restricţiile la care sunt supuse necunoscutele, ecuaţiile sau inecuaţiile sunt liniare;

-se cere minimizarea sau maximizarea unei funcţii liniare

$f: R^n \to R, f(x) = \sum c_j x_j, x \in R^n$;

-necunoscutele nu pot lua valori negative, deci $x_j \geq 0, 1 \leq j \leq n$;

-coeficienţii numerici ce apar în f şi restricţii, ca şi necunoscutele, au valori reale.

Aşadar, o problemă de programare liniară sau un program liniar constă în determinarea unui optim (minim/maxim) absolut $x^0 \in R^n$, cu componente nenegative, al unei funcţii liniare $f: R^n \to R$ satisfăcând un sistem de m ecuaţii liniare (sau inecuaţii liniare) cu n necunoscute, de rang m.

BIBLIOGRAFIE

1. Bălă Dumitru, Matematici aplicate în economie, Editura Universitaria, Craiova, 2007.
2. Bălă Dumitru, Elemente de matematică şi statistică.Teorie şi aplicaţii în economie, Editura Universitaria, Craiova, 2009.
3. Căpraru Marcel, Managementul calităţii şi performanţei în învăţământul universitar, Editura "Helicon", Timişoara, 2003.
4. Pera Aurel, Psihologia educaţiei matematice, Editura Didactică şi Pedagogică, R.A., Bucureşti, 2008.
5. Partenie Anucuţa, Pedagogie pentru studenţi şi cadre didactice care dau examen de definitivat şi gradul II, Editura Eurostampa, Timişoara, 1999.